

HOJA 6: ESPACIOS EUCLÍDEOS

1) Dadas A y B , matrices en el espacio $M_{n \times m}(R)$, se define $\langle A, B \rangle = \text{traza}(A B^t)$. Demuestre que esta aplicación cumple las propiedades de un producto escalar. Para el caso $m = n = 2$ halle la matriz de Gram de este producto escalar con respecto a la base usual de $M_{n \times m}(R)$.

2) Encontrar los cosenos de los ángulos entre la recta $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ y los ejes coordenados de R^n , con el producto escalar usual.

3) En el espacio vectorial R^3 se considera una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y un producto escalar $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, con norma asociada $\|\vec{x}\|$, tal que:

$$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_3\| = 3; \quad \|\vec{e}_2\| = 2; \quad \text{ángulo}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \text{ángulo}(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{3}; \quad \text{ángulo}(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = \frac{\pi}{2}$$

a) Halle la matriz de Gram en la base B .

b) Obtenga la matriz de Gram respecto de la base $B' = \{\vec{e}_1 - \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, -\vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$.

c) Encuentre una base de R^3 respecto de la cual la expresión del producto escalar sea:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

4) Sea $W = L(\{\vec{u}_1 = (1, 2, 0, 0), \vec{u}_2 = (1, 0, 0, 2), \vec{u}_3 = (1, -1, -1, 2)\}) \subset R^4$, con el producto escalar usual.

a) Encuentre una base ortonormal de W .

b) Complete la base hallada hasta obtener una base de R^4 .

5) Halle una base ortonormal de los siguientes subespacios euclídeos, y halle los subespacios ortogonales a los mismos:

a) $S = \{(x, y, z) \in R^3; x + 2y - z = 0\}$ con el producto usual de R^3 .

b) $T = L(\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\})$ en R^4 con el producto usual.

6) Sean $\{\vec{u}_1 = (-2, -1, 1), \vec{u}_2 = (0, -1, 0), \vec{u}_3 = (1, -1, 0)\}$ tres vectores de R^3 linealmente independientes. Se define un producto escalar en R^3 de forma que el conjunto anterior sea una base ortonormal. Encuentre la matriz de este producto escalar con respecto a la base canónica.

7) En R^4 con el producto escalar usual, halle la proyección ortogonal del vector $(0, 2, 1, -1)$ sobre el subespacio $U = \{(x, y, z, t) \in R^4; x + y = 0\}$.

8) En un espacio vectorial euclídeo, cuyo producto escalar tiene como matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, encuentre la proyección ortogonal de \vec{u}_3 sobre el subespacio $L(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\})$.

9) Se considera en R^3 el producto escalar que tiene por matriz con respecto a la base canónica $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y sea $U = \{(x, y, z); x = -z = y\}$.

a) Calcule el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

b) Encuentre una base de U^\perp .

c) Encuentre la proyección ortogonal de $(1, -2, 0)$ sobre U^\perp .

10) En R^3 se consideran la base canónica $B_C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ y el producto escalar con su norma asociada, que verifica: $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$, y ángulo $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 60^\circ$ para $i \neq j$, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Se pide:

- La matriz de Gram en la base B_C .
- La distancia del punto $P = (1, 2, 3)$ al origen.
- Las ecuaciones de la proyección ortogonal de la recta $x = y = z$ sobre el plano $y = 0$.

11) En R^4 , con el producto escalar usual, se considera el hiperplano

$$H = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 ; x_1 - x_3 - x_4 = 0 \}.$$

Se pide:

- Una base ortonormal de H .
- La distancia del vector $\vec{OA} = (1, 0, 1, 1)$ al hiperplano H .
- La proyección sobre H de la recta afín que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1, 1)$ y $B = (2, 0, 0, 1)$.

12) En R^4 , con el producto escalar usual, halle la distancia de $(1, 0, -1, 0)$ a $S := \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$.

Calcule S^\perp .

13) Sean $P_{\pi_1}: R^3 \rightarrow R^3$ la proyección ortogonal de R^3 sobre el plano $\pi_1 \equiv y = 0$ y $P_{\pi_2}: R^3 \rightarrow R^3$ la proyección ortogonal de R^3 sobre el plano $\pi_2 \equiv y - z = 0$.

- Obtenga la matriz de la aplicación composición $P_{\pi_2} \circ P_{\pi_1}$ en la base canónica de R^3 .
- ¿Es $P_{\pi_2} \circ P_{\pi_1}$ una proyección ortogonal? Justifique la respuesta.
- Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ un endomorfismo diagonalizable con $\sigma(f) = \{1, \lambda_1, \lambda_2\}$. Especifique condiciones necesarias sobre los autovalores de f y los subespacios propios asociados para que se cumplan las siguientes afirmaciones:
 - f es biyectiva.
 - f es ortogonal.

14) En R^3 se considera el producto escalar $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ definido por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ con respecto a la base canónica. Se define $f: R^3 \rightarrow R^3$ por $f(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle \vec{b}$, con $\vec{a}, \vec{b} \in R^3$ dos vectores fijos. Halle los autovalores de f , $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$. ¿Cuál es el plano ortogonal al vector $\vec{c} = (1, 1, 0)$?